

14.1

a) Jonon suhdeluku on

$$q = \frac{35}{7} = 5$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \left(= \frac{a_3}{a_2} \right)$$

b) Jonon yhdeksäs jäsen on

$$a_9 = 7 \cdot 5^8 = 2\,734\,375$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

missä $a_1 = 7$, $q = 5$ ja $n = 8$.

c) Jonon yleisen jäsenen lauseke on

$$a_n = 7 \cdot 5^{n-1}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

missä $a_1 = 7$ ja $q = 5$.

Vastaus

a) $q = 5$

b) $a_9 = 2\,734\,375$

c) $a_n = 7 \cdot 5^{n-1}$

14.2

a) $a_n = 9 \cdot 3^{n-1}$

$$a_4 = 9 \cdot 3^{4-1} = 9 \cdot 3^3 = 243$$

b) $a_n = 9 \cdot (-2)^{n-1}$

$$a_4 = 9 \cdot (-2)^{4-1} = 9 \cdot (-2)^3 = -72$$

c) $a_n = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$a_4 = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{3}$$

Vastaus

a) $a_n = 9 \cdot 3^{n-1}$, $a_4 = 243$

b) $a_n = 9 \cdot (-2)^{n-1}$, $a_4 = -72$

c) $a_n = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $a_4 = \frac{8}{3}$

14.3

$$a_1 = 5 \text{ ja } q = -3$$

$$\text{a) } a_2 = 5 \cdot (-3)^{2-1} = 5 \cdot (-3) = -15 \neq 15$$

Väittämä on väärin.

$$\text{b) } a_4 = 5 \cdot (-3)^{4-1} = 5 \cdot (-3)^3 = -135 < 0$$

Väittämä on oikein.

$$\text{c) Väittämä on väärin, koska esimerkiksi } a_2 = -15 < 1.$$

$$\text{d) } a_n = 5 \cdot (-3)^{n-1} \neq -5 \cdot 3^{n-1}$$

Väittämä on väärin.

$$\text{d) } a_n = 5 \cdot (-3)^{n-1}$$

Väittämä on oikein.

Vastaus

- a) väärin
- b) oikein
- c) väärin
- d) väärin
- d) oikein

14.4

a)

$$a_1 = 18$$

Jonon seuraava jäsen saadaan

$$a_2 = 18 \cdot 1,2 = 21,6$$

kertomalla edellinen jäsen luvulla 1,2.

$$a_3 = 21,6 \cdot 1,2 = 25,92$$

$$a_4 = 25,92 \cdot 1,2 = 31,104$$

b) Jonon yleisen jäsenen lauseke on

$$a_n = 18 \cdot 1,2^{n-1}.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = 100$$

$$18 \cdot 1,2^{n-1} = 100$$

$$n \approx 10,4$$

Koska jonon seuraava jäsen saadaan aina edellisestä kertomalla se luvulla 1,2, niin jonon jäsenet kasvavat koko ajan.

Siis viimeinen jonon jäsen, joka on pienempi kuin 100 on a_{10} .

Jonon 10 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 100.

Vastaus

a) $a_1 = 18$, $a_2 = 21,6$, $a_3 = 25,92$, $a_4 = 31,104$

b) 10

14.5

Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 500$ ja suhdeluku $q = 0,75$.

a) Jonon yleisen jäsenen lauseke on

$$a_n = 500 \cdot 0,75^{n-1}.$$

b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$500 \cdot 0,75^{n-1} = 1$$

$$n \approx 22,6$$

Jonon seuraava jäsen saadaan aina kertomalla edellinen luvulla $0,75$, joten jonon jäsenet pienenevät koko ajan. Viimeinen jonon jäsen, joka on ykköstä suurempi, on a_{22} .

Jonossa on siis 22 jäsentä, jotka ovat ykköstä pienempiä.

Vastaus

a) $a_n = 500 \cdot 0,75^{n-1}.$

b) 22

14.6

Jonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 2 \cdot 1,06^{n-1}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$2 \cdot 1,06^{n-1} = 30$$

$$n \approx 47,5$$

Jonon seuraava jäsen saadaan aina kertomalla edellinen jäsen luvulla 1,06, joten lukujonon jäsenet suurenevat koko ajan. Viimeinen jäsen, joka on lukua 30 pienempi, on a_{47} .

Lukujonossa on siis 47 jäsentä, jotka ovat lukua 30 pienempiä.

Vastaus

47

14.7

a) Jonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 13 \cdot q^{n-1}$.

Jonon kuudes jäsen on $a_6 = 13 \cdot q^{6-1} = 13 \cdot q^5$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan q .

$$a_6 = 13\,312$$

$$13 \cdot q^5 = 13\,312$$

$$q = 4$$

b) Jonon 12. jäsen on

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{12-1}$$

$$= 13 \cdot 4^{11}$$

$$= 54\,525\,952$$

Vastaus

a) $q = 4$

b) $a_{12} = 54\,525\,952$

14.8

a) Jonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Jonon viides jäsen on $a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = a_1 \cdot q^4$.

Jonon kahdeksas jäsen on $a_8 = a_1 \cdot q^{8-1} = a_1 \cdot q^7$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan a_1 ja q .

$$\begin{cases} a_5 = 2000 \\ a_8 = 128 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^4 = 2000 \\ a_1 \cdot q^7 = 128 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 78\,125 \\ q = 0,4 \end{cases}$$

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 78\,125$.

b) Jonon 10. jäsen on

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 \cdot q^{10-1} \\ &= 78\,125 \cdot 0,4^9 \\ &= 20,48 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $a_1 = 78\,125$

b) $a_{10} = 20,48$

14.9

$$100 \% + 5,2 \% = 105,2 \% = 1,052$$

Vuotuiset hinnat muodostavat geometrisen jonon

$$1450 \text{ €}, 1450 \cdot 1,052 \text{ €}, 1450 \cdot 1,052^2 \text{ €}, \dots$$

Jonon yleisen jäsenen lauseke on $1450 \cdot 1,052^{n-1} \text{ €}$.

a) Hinta neljäntenä vuotena on

$$a_4 = 1450 \cdot 1,052^{4-1} \text{ €} \approx 1688 \text{ €}$$

b) Hinta n :ntenä vuotena on $1450 \cdot 1,052^{n-1} \text{ €}$.

c) Hinta 8. vuotena on

$$a_8 = 1450 \cdot 1,052^{8-1} \text{ €} \approx 2068 \text{ €}$$

Vastaus

a) 1688 €

b) $a_n = 1450 \cdot 1,052^{n-1} \text{ €}$

c) 2068 €

14.10

Geometrinen jono alkaa $x-1$, x , $x+3$,

- a) Peräkkäisten jäsenten suhde on vakio.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x+3}{x}$$
$$x = \frac{3}{2}$$

- b) Jonon peräkkäisten jäsenten suhde on

$$q = \frac{x}{x-1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1} = 3.$$

Vastaus

- a) $x = \frac{3}{2}$
b) $q = 3$

14.11

a) $q = \frac{-15}{5} = -3$

b) $a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = 5 \cdot (-3)^4 = 405$

c) $a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = 5 \cdot (-3)^5 = -1215$

d) $a_n = 5 \cdot (-3)^{n-1}$

Vastaus

a) $q = -3$

b) $a_5 = 405$

c) $a_6 = -1215$

d) $a_n = 5 \cdot (-3)^{n-1}$

14.12

a) $q = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

b) $a_n = 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

c) $a_{20} = 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{20-1} \approx 0,016$

Vastaus

a) $q = \frac{2}{3}$

b) $a_n = 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

c) $a_{20} \approx 0,016$

14.13

$$a_1 = 72 \text{ ja } q = -0,5$$

a) $a_1 = 72$

$$a_2 = 72 \cdot (-0,5) = -36$$

$$a_3 = -36 \cdot (-0,5) = 18$$

$$a_4 = 18 \cdot (-0,5) = -9$$

$$a_5 = -9 \cdot (-0,5) = 4,5$$

- b) Lukujonon seuraava jäsen saadaan aina kertomalla edellinen luvulla $-0,5$.

Lukujonon joka toinen jäsen on positiivinen (1. jäsenestä alkaen) ja joka toinen negatiivinen (2. jäsenestä alkaen). Lukujonon jäsenten itseisarvo pienenee koko ajan.

Lukujonon kuudes jäsen on

$$a_6 = 4,5 \cdot (-0,5) = -2,25$$

ja seitsemäs jäsen on

$$a_7 = -2,25 \cdot (-0,5) = 1,125.$$

Siis jäsenestä a_7 alkaen jonon jäsenten itseisarvot ovat pienempiä kuin 2. Lukujonon alussa on lukua 2 suurempia jäseniä 3 kappaletta:

$$a_1 = 72, a_3 = 18 \text{ ja } a_5 = 4,5.$$

Vastaus

a) $a_1 = 72, a_2 = -36, a_3 = 18, a_4 = -9, a_5 = 4,5$

b) 3

14.14

a) Jonon suhdeluku on

$$q = \frac{900}{1200} = \frac{3}{4}.$$

Yleisen jäsenen lauseke on

$$a_n = 1200 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$1200 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 1$$
$$n \approx 25,6$$

Jonon jäsen saadaan aina kertomalla edellinen jäsen luvulla

$\frac{3}{4}$ ($= 0,75$), joten jonon jäsenet pienenevät koko ajan. Ensimmäinen jäsen 1200 on ykköistä suurempi ja viimeinen ykköistä suurempi jäsen on a_{25} . Jonossa on siis 25 jäsentä, jotka ovat suurempia kuin luku 1.

Vastaus

a) $a_n = 1200 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

b) 25

14.15

a) Koska $a_1 = 5$, niin $a_9 = 5 \cdot q^{9-1}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan q .

$$a_9 = 1280$$

$$5 \cdot q^{9-1} = 1280$$

$$q = -2 \text{ tai } q = 2$$

b) Kun $q = -2$, niin $a_6 = 5 \cdot (-2)^{6-1} = -160$.

Kun $q = 2$, niin $a_6 = 5 \cdot 2^{6-1} = 160$.

Vastaus

a) $q = -2$ tai $q = 2$

b) $a_6 = -160$ tai $a_6 = 160$

14.16

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \quad \text{ja} \quad a_6 = a_1 \cdot q^{6-1}$$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan a_1 ja q .

$$\begin{cases} a_3 = 12 \\ a_6 = 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^{3-1} = 12 \\ a_1 \cdot q^{6-1} = 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases}$$

- a) Jonon suhdeluku on $q = 2$.
- b) Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$.
- c) Jonon yleinen jäsen on $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.
- d) Jonon yhdeksäs jäsen on $a_9 = 3 \cdot 2^{9-1} = 768$.

Vastaus

- a) $q = 2$
- b) $a_1 = 3$
- c) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
- d) $a_9 = 768$

14.17

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} \text{ ja } a_{11} = a_1 \cdot q^{11-1}$$

a) Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan a_1 ja q .

$$\begin{cases} a_5 = 16 \\ a_{11} = 128 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^{5-1} = 16 \\ a_1 \cdot q^{11-1} = 128 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} a_1 = 4 \\ q = \sqrt{2} \end{cases}$$

Koska jonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, on myös suhdeluvun q oltava positiivinen, sillä muutoin joka toinen jonon jäsen olisi negatiivinen.

Siis jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 4$ ja suhdeluku $q = \sqrt{2}$.

b) Jonon toinen jäsen on $a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} = 4 \cdot \sqrt{2} \ (\approx 5,7)$.

Vastaus

a) $a_1 = 4$

b) $a_2 = 4\sqrt{2}$

14.18

- a) Seuraavan vuoden palkka saadaan lisäämällä edellisen vuoden palkkaan aina 600 €.

Vuosipalkat muodostavat aritmeettisen jonon, jossa $a_1 = 28\,000$ € ja $d = 600$ €.

Lukujonon viides jäsen on

$$a_5 = a_1 + (5-1)d = 28\,000 \text{ €} + 4 \cdot 600 \text{ €} = 30\,400 \text{ €}.$$

- b) Seuraavan vuoden palkka saadaan kertomalla edellisen vuoden palkka aina luvulla 1,03 (100 % + 3 % = 103 % = 1,03).

Vuosipalkat muodostavat geometrisen jonon, jossa $a_1 = 28\,000$ € ja $q = 1,03$.

Lukujonon viides jäsen on

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = 28\,000 \text{ €} \cdot 1,03^4 \approx 31\,514 \text{ €}.$$

Vastaus

- a) aritmeettinen jono, $a_5 = 30\,400$ €
b) geometrinen jono, $a_5 = 31\,514$ €

14.19

Jatketaan annettuja lukujonoja 1–3, jotta voidaan päätellä, mihin lukujonoon kohtien a–f luvut kuuluvat.

1) $a_1 = 1, \quad q = \frac{6}{2} = 3, \quad a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, 13 122, ...

2) $a_1 = 2, \quad d = 5 - 2 = 3, \quad a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3$

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29,
32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, ...

3) $a_1 = 2187, \quad q = \frac{729}{2187} = \frac{1}{3}, \quad a_n = 2187 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$

- a) Luku 243 kuuluu jonoon 3.
- b) Luku 4374 kuuluu jonoon 1.
- c) Luku 486 kuuluu jonoon 1.
- d) Luku 17 kuuluu jonoon 2.
- e) Luku 50 kuuluu jonoon 2.
- f) Luku 9 kuuluu jonoon 3.

Vastaus

- a) 3
- b) 1
- c) 1
- d) 2
- e) 2
- f) 3

14.20

- a) Lukujono $5x-1, 4x, 5x+1, \dots$ on geometrinen, joten peräkkäisten jäsenten suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{4x}{5x-1} = \frac{5x+1}{4x}$$
$$x = -\frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{3}$$

- b) Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde.

$$\text{Kun } x = -\frac{1}{3}, \text{ niin } q = \frac{4x}{5x-1} = \frac{4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Kun } x = \frac{1}{3}, \text{ niin } q = \frac{4x}{5x-1} = \frac{4 \cdot \frac{1}{3}}{3 \cdot \frac{1}{3} - 1} = 2.$$

Vastaus

- a) $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = \frac{1}{3}$
- b) $q = \frac{1}{2}$ tai $q = 2$

14.21

Video jaetaan

1. päivänä 5 kertaa,
 2. päivänä $5 \cdot 3 = 15$ kertaa,
 3. päivänä $15 \cdot 3 = 45$ kertaa,
 4. päivänä $45 \cdot 3 = 135$ kertaa,
 5. päivänä $135 \cdot 3 = 405$ kertaa,
- jne.

Seuraavan päivän jakokertojen määrä saadaan aina kertomalla edellisen päivän jakojen määrä luvulla 3. Päivittäisten jakokertojen määrät muodostavat geometrisen jonon, jossa $a_1 = 5$ ja $q = 3$.

- a) Tammikuun 3. päivänä video jaetaan $a_3 = 45$ kertaa.
- b) Tammikuun n . päivänä video jaetaan $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ kertaa.
- c) Tammikuun 8. päivänä video jaetaan $a_8 = 5 \cdot 3^{8-1} = 10\,935$ kertaa.
- d) Joku Maapallon ihmisistä saa Paulan kissavideon kahdelta eri henkilöltä viimeistään sinä päivänä, kun video jaetaan vähintään 8 miljardille ihmiselle. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = 8\,000\,000\,000$$

$$5 \cdot 3^{n-1} = 8\,000\,000\,000$$

$$n \approx 20,3$$

Pyöristetään ylöspäin.

Joku saa videon kahdelta eri henkilöltä viimeistään tammikuun 21. päivä.

Vastaus

- a) 45 b) $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ c) 10 935 d) tammikuun 21. päivä